

Das Spiralprinzip

Begegnen – Wiederaufgreifen – Vertiefen

Im Mathematikunterricht wird ständig auf vorangehende Inhalte und Betrachtungen zurückgegriffen. Für tragfähige Begriffsentwicklungen ist es wichtig, dass diese vertikale Vernetzung bewusst gestaltet und für Schülerinnen und Schüler erfahrbar wird.

ANDREAS BÜCHTER

Jeder von uns kennt die schönen – oft schmetterlingsartigen – Klecksbilder von Kindern, die häufig schon in vorschulischen Bildungseinrichtungen hergestellt werden (Abb. 1a). Bewusst oder unbewusst sammeln Kinder hier erste Erfahrungen mit Symmetrie als Gestaltungselement. Dabei steht zunächst das praktisch-gegenständliche Erzeugen achsensymmetrischer Figuren durch das Falten der Spiegelachse im Vordergrund. Im Grundschulunterricht wird hieran angeschlossen, wenn die jungen Schülerinnen und Schüler wieder achsensymmetrische Klecksbilder herstellen, aber auch gegebene Figuren auf Achsensymmetrie untersuchen (Abb. 1b). Symmetrie erscheint dann weiterhin primär als Eigenschaft von Figuren.

In der Sekundarstufe I wird die Sichtweise dann von der Achsensymmetrie von Figuren auf die Achsenspiegelung gelenkt, bei der jedem Punkt der Zeichenebene ein Bildpunkt zugeordnet wird (Abb. 1c). Statt nur einer Figur, werden nun auch mehrere nicht zusammenhängende Figuren und deren Spiegelbilder betrachtet. Zunehmend steht dabei eine Analyse der Eigenschaften der Achsenspiegelung im Vor-

dergrund, auch wenn diese heute nicht mehr explizit als Abbildung formalisiert wird. Die Beobachtung der Längen- und Winkeltreue kann dann auf die Frage weiterer Lageveränderungen mit vergleichbaren Eigenschaften führen. Operativ – etwa mithilfe des Übertragens von Figuren auf Folien und das Verschieben oder (Um-)Drehen der Folien – geraten so alle Kongruenzabbildungen in den Blick (Abb. 1d). Anschaulich ist klar, dass die Hintereinanderausführung von Kongruenzabbildungen wieder eine Kongruenzabbildung ist und dass jede Kongruenzabbildung umkehrbar ist. In einer solchen vertieften Betrachtungsweise sollen Schülerinnen und Schüler diese aus schulischer Sicht recht abstrakten algebraischen Überlegungen heute nicht mehr erfassen (etwa im Gegensatz zur Schulmathematik der 1970er-Jahre) – die Phänomene können sie aber untersuchen und beschreiben. Eine Vertiefung findet in der Hochschulmathematik im Rahmen der Gruppentheorie statt.

Einfach beginnen, schrittweise vertiefen

Am Beispiel der Achsensymmetrie und der Kongruenzabbildung wird deutlich, wie grundlegende mathematische Begriffe schon früh propädeutisch und kindgerecht in den Blick genommen und dann schrittweise vertieft werden können. Dabei wird an die vorhandenen Erfahrungen und Vorstellungen angeknüpft und Begriffe werden so weit entwickelt

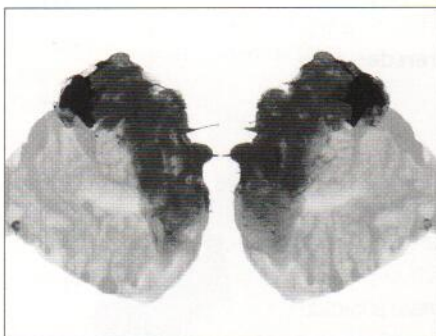


Abb. 1a: Im Kindergarten gemachte Erfahrungen mit der Achsensymmetrie wie beim Klecksbild sind oft noch unbewusst vorhanden.



Abb. 1b: In der Grundschule werden Figuren gezielt untersucht: Wo ist die Symmetrieachse?

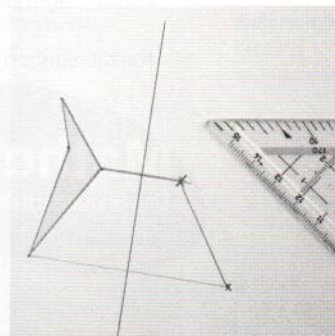


Abb. 1c: Zu Beginn der Sekundarstufe I wird die Konstruktion einer Achsenspiegelung behandelt.

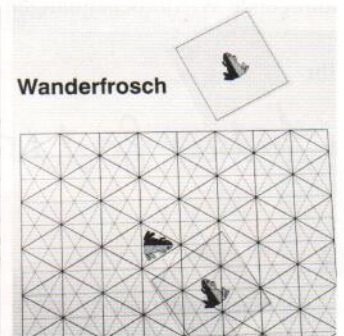


Abb. 1d: Es folgt die Suche nach weiteren Kongruenzabbildungen durch Drehen, Schieben und Wenden mittels Folie (Sekundarstufe I).

1 WISSENSWERT

Jérôme Bruner und das Spiralprinzip

Jérôme S. Bruner (* 1915 in New York) hat in der Pädagogischen Psychologie grundlegende Beiträge zur Entwicklungs- und Lerntheorie geleistet. Er hat diese für die Unterrichtspraxis soweit ausgearbeitet, dass die einzelnen Fachdidaktiken auf dieser Basis den Unterricht lang- und mittelfristig planen sowie konkrete Lernumgebungen konzipieren können.

Jérôme S. Bruner hat wesentlich zur „kognitiven Wende“ in der Psychologie beigetragen. Mit der Hinwendung zur Kognition anstelle der ausschließlichen Beobachtung (äußerlich sichtbaren) menschlichen Verhaltens konnten Lernprozesse besser erklärt werden. Er hat sich dabei intensiv mit der Frage der Entwicklung neuer Begriffe auf der Basis der vorhandenen auseinandergesetzt.

Wesentliche Aspekte des Spiralprinzips

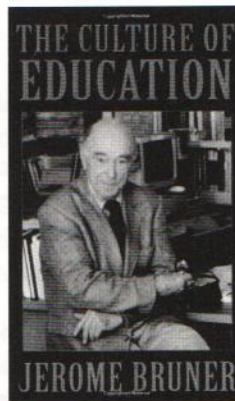
Ausgangspunkt für das Spiralprinzip ist eine zentrale Hypothese von Jérôme S. Bruner:

„Jedem Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden“ (Bruner, 1973).

Intellektuelle Ehrlichkeit kann dabei als Elementarisierung im Sinne von „vereinfachen, ohne zu verfälschen“ verstanden werden. Diese Elementarisierung muss (mit dem Wissen der Erwachsenen) aus der Sicht der Kinder gestaltet werden, um an deren vorhandenen Vorstellungen anknüpfen zu können. Das Spiralprinzip beschreibt Bruner (ebd.) wie folgt:

„Der Anfangsunterricht in den Naturwissenschaften, Mathematik, Sozialkunde und Literatur sollte so angelegt sein, daß diese Fächer mit unbedingter intellektueller Redlichkeit gelehrt werden, aber mit dem Nachdruck auf dem intuitiven Erfassen und Gebrauchen dieser grundlegenden Ideen. Das Curriculum sollte bei seinem Verlauf wiederholt auf diese Grundbegriffe zurückkommen und auf ihnen aufbauen, bis der Schüler den ganzen formalen Apparat, der mit ihnen einhergeht, begriffen hat.“

In einem Unterricht, der das Spiralprinzip umsetzt, spielen also das „vorwegnehmende Lernen“ und die „Fort-



setzbarkeit“ der Begriffsentwicklung eine besondere Rolle. Vorwegnehmendes Lernen findet oft als propädeutische Thematisierung von Phänomenen und Begriffen statt, z. B. wenn bereits in der Grundschule in bestimmten Größenbereichen mit rationalen Zahlen aus dem Alltag wie 1,25 Euro oder $\frac{1}{4}$ Liter Milch gearbeitet wird. Die Fortsetzbarkeit geht einher mit der Forderung der *intellektuellen Ehrlichkeit*. So sind z. B. verkürzte Merksätze wie „kein gemeinsamer Punkt: Passante; ein gemeinsamer Punkt: Tangente; zwei gemeinsame Punkte: Sekante“ für Parabeln in der Koordinatengeometrie zu vermeiden. Stattdessen sollten wesentliche begriffliche Aspekte in den Vordergrund gerückt werden: „Wenn man immer weiter vergrößert, unterscheiden sich Parabel und Tangente in diesem Bereich immer weniger voneinander.“ Das Spiralprinzip ist als Grundlage für die Unterrichtsplanung in der Mathematikdidaktik weitgehend unumstritten.

Das EIS-Prinzip

Neben dem Spiralprinzip ist Bruners Theorie der Darstellungsebenen von unmittelbarer Bedeutung. Vor allem im Mathematikunterricht hat sich ein Vorstellungsaufbau gemäß der (individuell angepassten) Abfolge „Enaktiv – Ikonisch – Symbolisch“ (sogenanntes EIS-Prinzip) bewährt (vgl. Büchter/Haug 2013). Dies kann sowohl innerhalb einer Unterrichtseinheit umgesetzt werden als auch langfristig beim spiralförmigen Lernen. Bei fortschreitender Abstraktion mathematischer Begriffe können Schülerinnen und Schüler an enaktive Vorerfahrungen aus vergangenen Schuljahren erinnert werden oder dort anknüpfen.

und formalisiert wie die jeweils vorhandenen formalen Möglichkeiten dies zulassen. Jede Stufe der oben beschriebenen Entwicklung baut auf die vorangehende auf, ermöglicht zu Beginn aber auch ein integriertes Wiederholen des Vorangegangenen, damit sichergestellt ist, dass möglichst alle Schülerinnen und Schüler über die notwendige Basis für das Weiterlernen verfügen.

Derart langfristig angelegte Prozesse der Begriffsentwicklung folgen dem sogenannten Spiralprinzip, das in dieser Form auf den Psychologen Jérôme S. Bruner zurückgeht (Kasten 1). Da die langfristige Planung von Unterricht in der Regel durch vorgegebene Lehrpläne geschieht, fordert das Spiralprinzip zunächst entsprechende Spiralcurricula ein. Aber auch auf der Ebene der mittel- und kurzfris-

Beispiele für das Spiralprinzip

Von Zuordnungen zu Funktionen und Abbildung

Grundschule: Im Sachrechnen werden Zuordnungen (vor allem proportionale) zwischen Größen (wie „Menge zu Preis“) betrachtet. Dabei werden auch Wertetabellen und Muster in den Zahlbeziehungen untersucht.

Beginn der Sekundarstufe I: Nun werden verschiedene Darstellungen für Zuordnungen thematisiert, Darstellungen gewechselt und Zuordnungen selbst Gegenstand der Betrachtung (proportional/umgekehrt proportional/andere). Bei der Klärung des Funktionsbegriffs spielt die Eindeutigkeit der Zuordnung dann eine zentrale Rolle („Welche Größe kann der anderen eindeutig zugeordnet werden?“).

Ende der Sekundarstufe I: Mit der Funktionenlehre werden Funktionen als mathematische Objekte, mit denen Zuordnungen beschrieben werden können, betrachtet und auf der Basis der nun vorhandenen algebraischen Möglichkeiten untersucht („Wie wirken sich Veränderungen am Funktionsterm auf den Graphen aus – und umgekehrt?“).

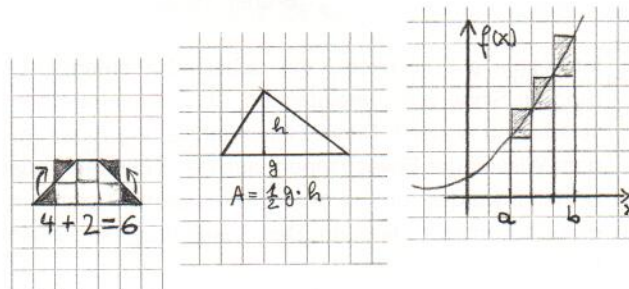
Gymnasiale Oberstufe: Funktionen werden systematisch als Objekte betrachtet, die transformiert oder verknüpft werden können. Ein weiterer Schritt ist die Verallgemeinerung auf Abbildung, die nicht mehr nur Zusammenhänge zwischen zwei Größen beschreiben, sondern z. B. im Fall der Wahrscheinlichkeit Teilmenge einer (i. d. R. diskreten, sogar endlichen) Ergebnismenge eine reelle Zahl (zwischen 0 und 1) zuordnen.

Vom Zerschneiden und Zusammenlegen zu Messprinzipien und zum Maßbegriff

Vorschule/Grundschule: Im Anfangsunterricht wird die Gleichheit von Flächeninhalten materialbasiert und handlungsorientiert durch das Zerschneiden und Zusammenlegen von Figuren erfahrbar. Wichtige Messprinzipien wie die Additivität von Flächeninhalten oder die Flächengleichheit kongruenter Figuren werden dann etwa beim Auslegen von Rechtecken mit Zentimeterquadraten (als standardisiertem Maß) erfahrbar.

Sekundarstufe I: Hier werden das Messen und der Maßbegriff vor allem innerhalb der messenden Geometrie bei Längen, Flächeninhalten und Volumina vertieft.

Gymnasiale Oberstufe: Es folgen Verallgemeinerungen im Rahmen der Integralrechnung oder durch die Auffassung von Wahrscheinlichkeit als Maß für das Eintreten bestimmter Ereignisse.



tigen Planung durch die Lehrkräfte stellen sich die Fragen, wie Begriffe bereits propädeutisch betrachtet und „nach hinten entwicklungs offen“ thematisiert werden können. Klar ist, dass für derartige Betrachtungen Themenstränge als Gerüst dienen, entlang derer sich Begriffe spiralig entwickeln können. Bruner selbst hat hier von „fundamentalen Ideen“ gesprochen.

In der mathematikdidaktischen Diskussion findet man auch „zentrale Ideen“ (vgl. Klika, 2003) oder in den Bildungsstandards der KMK „Leitideen“. Diese Begriffe werden allerdings nicht einheitlich verwendet und auch die jeweils zugehörigen Kataloge weisen häufig Unterschiede auf. Für die Unterrichtspraxis ist letztlich nur wichtig, dass bestimmte „grundlegende Begriffe“ (s. Vollrath/Roth, 2012) wie „Zahl“, „Funktion“, „Wahrscheinlichkeit“ oder „Maß“ erkannt und berücksichtigt werden. Weitere Beispiele für propädeutische Betrachtungen grundlegender mathematischer Begriffe, bei denen eine Fortsetzbarkeit der Betrachtungen im Sinne einer Vertiefung, Verallgemeinerung und Ausdifferenzierung beachtet wird, werden in **Kasten 2** dargestellt.

Die folgenden Blicke in die Geschichte der Mathematik und auf individuelle Lernprozesse verdeutlichen, dass das Spiralprinzip letztlich nur eine natürliche Entwicklung der fachlichen Gegenstände einfordert. Damit wird auch die inhaltliche Verbindung zu historisch-genetischen bzw. psychologisch-genetischen Ansätzen aufgezeigt (s. Selter, 1997). Anschließend werden Konsequenzen, die bei Berücksichtigung des Spiralprinzips für den Unterricht folgen, und Herausforderungen, die bei der Umsetzung des Spiralprinzips im Unterricht bestehen, dargestellt und durch Gestaltungshinweise für die Planung und Durchführung von Unterricht nach dem Spiralprinzip ergänzt.

Vom Gespür für den Zufall zu Gesetzen der großen Zahl

Vorschule/Grundschule: Würfelspiele kennen Kinder – und in der Grundschule führen sie Zufallsexperimente durch und werten diese aus (vgl. Bildungsstandards). Dabei stehen die Idee des Zufallsexperiments und die Entwicklung eines Gespürs für den Zufall im Vordergrund.

Sekundarstufe I: Zunächst werden die Idee des Zufallsexperiments und das Gespür für den Zufall vertieft, wobei das Zusammenspiel von Wahrscheinlichkeit und (empirisch beobachteter) relativer Häufigkeit explizit in den Blick genommen wird. So realisiert sich die theoretisch angenommene Wahrscheinlichkeit (etwa beim Würfel) erfahrungsgemäß erst nach sehr vielen Durchführungen und nur näherungsweise auch in den relativen Häufigkeiten. Dieses „Empirische Gesetz der großen Zahlen“ ist kein mathematischer Satz, sondern eine Erfahrungstatsache (theoretisch könnte auch bei 10000 Würfeln mit einem normalen Spielwürfel immer nur die „6“ fallen). Diese Erfahrung wird genutzt, um die Wahrscheinlichkeiten bei Würfeln oder Reißzwecken durch lange Versuchsserien über die relativen Häufigkeiten näherungsweise zu ermitteln.

Gymnasiale Oberstufe: Nun stehen die Mittel bereit, um den Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten im (schwachen) „Bernoulli’schen Gesetz der großen Zahlen“ als Wahrscheinlichkeitsaussage in einem mathematischen Satz zu formulieren.

Von Handlungsaufforderungen zu Rechenoperationen und inneren Verknüpfungen

Grundschule: Im Anfangsunterricht interpretieren Kinder ein Ausdruck wie „ $2 + 7 =$ “ in der Regel als Handlungsaufforderung, die zum Ergebnis „9“ führt.

$$2 + 7 = 9$$

Sekundarstufe I: Spätestens beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra werden – etwa in Klasse 7 oder 8 – Gleichungen als Ausdruck der Äquivalenz zweier (zumeist unterschiedlich dargestellter) Objekte betrachtet.

„ $2 + 7 = 9$ “ bedeutet dann, dass „ $2 + 7$ “ eine andere Darstellung von „9“ (oder der Quadratwurzel von 81, oder ...) ist. Insbesondere beim Arbeiten mit Variablen, Termen und Gleichungen wird dann bedeutsam, dass „ $x + y$ “ eine innere Verknüpfung innerhalb eines bestimmten Zahlbereichs, also selbst eine Zahl, ist.

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= 10 \\ \Leftrightarrow 3x &= 6 \end{aligned}$$

Gymnasiale Oberstufe: Jetzt werden nicht nur Zahlen (konkret oder als Variablen) miteinander verknüpft, sondern auch Funktionen (z. B. bei der Summen-, Produkt- oder Kettenregel in der Differenzialrechnung) und (Übergangs-) Matrizen in der Linearen Algebra.

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

Entdecken von Mathematik: Vertiefung, Verallgemeinerung, Ausdifferenzierung

Bei der individuellen Aneignung und Weiterentwicklung von Mathematik durchlaufen Schülerinnen und Schüler Etappen, die Parallelen zur historischen Entwicklung der Mathematik aufweisen (**Kasten 3**, S. 6). Dies bedeutet nicht, dass Mathematikunterricht konsequent historisch-genetisch aufgebaut werden muss. Für das schulische Lehren und Lernen gilt aber: Mathematikunterricht fängt niemals „bei Null“ an, sondern trifft immer auf schon vorhandene Vorstellungen. Dies gilt nicht nur für den Anfangs-, sondern auch für den späteren Unterricht, in dem die Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler zunehmend durch vorangegangenen Mathematikunterricht geprägt werden. Dementsprechend sollte bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten immer darauf geachtet werden,

- an welche Erfahrungen bereits angeknüpft werden kann, wie diese Inhalte also bereits früher im Unterricht oder im Alltag in Erscheinung getreten sind (*Rückschau*), und
- wie die Auseinandersetzung später verallgemeinert bzw. vertieft wird, wie also propädeutisch substanzielle Fragen für das fortgesetzte Mathematisieren betrachtet werden können (*Vorschau*).

Vorschulische Ausgangspunkte sind häufig z. B. durch Zählen und zählendes Rechnen in bestimmten Kontexten gekennzeichnet, wobei diese frühen Kompetenzen stark an den jeweiligen Gegenstandsbereich gebunden sind (etwa wenn Fünfjährige mit kleinen Geldbeträgen auf der Basis der für die Währung geltenden Bündelungsschritte rechnen können).

Für die Mathematik typische Abstraktionsschritte, die in dieser Form häufig erst in der Schule statt-

finden, sind die Entwicklung eines allgemeinen Zahlbegriffs und das abstrakte Rechnen mit Zahlen. Dabei sollen die geistigen Tätigkeiten schrittweise von gegenständlichen Handlungen oder bildlichen Veranschaulichungen entkoppelt und abstrakt durchführbar werden. Ähnliches gilt im Bereich der Figuren, wenn „Kreis“ oder „Quadrat“ nicht mehr in bestimmten Gegenstandsbereichen betrachtet, sondern selbst zum Gegenstand weiterer Entdeckungen gemacht werden. Im Verlauf der Schulzeit von der Primarstufe über die Sekundarstufe I bis hin zur Sekundarstufe II werden viele fachliche Konzepte im besten Fall zunächst propädeutisch thematisiert, später intensiv erkundet und systematisiert und noch später wiederaufgegriffen und vertieft, verallgemeinert oder ausdifferenziert.

Konsequenzen für die Unterrichtsplanung

Der uns vertraute hierarchische Aufbau mit zunehmender Abstraktion durch fortgesetzte Mathematisierung kann im Unterricht systematisch im Sinne des Spiralprinzips berücksichtigt werden. Aktivitäten der Unterrichtsplanung, bei denen das Spiralprinzip berücksichtigt werden kann, lassen sich stark vergrößert mit drei Zeithorizonten versehen: lang-, mittel- und kurzfristig.

Langfristig denken

Die langfristige Unterrichtsplanung erfolgt vorrangig mit Blick auf die Inhalte und ist zunächst Gegenstand der Curriculumentwicklung seitens der Bildungsverwaltung (Lehrpläne) und der Fachkonferenzen (schulinterne Arbeitspläne). Die Intensi-

tät der mittelfristigen Unterrichtsplanung hängt stark von individuellen Arbeitsweisen und Kooperationsstrukturen in den einzelnen Fachkonferenzen ab, etwa wenn gemeinsame Halbjahres- und Reihenplanungen (ggf. mit Parallelarbeiten) entwickelt werden. Werden diese Aktivitäten, bei denen über die nächste Unterrichtsstunde hinausgedacht wird, innerhalb der Schule gestärkt, gelingt die Umsetzung des Spiralprinzips im Unterricht leichter.

Die überwiegende Zeit bei der Unterrichtsplanung fließt wohl immer in die kurzfristige Vorbereitung der nächsten Stunde(n). Umso wichtiger ist es, auch hier langfristig zu denken. Natürlich vergewissern wir uns, über welche Voraussetzungen unsere Schülerinnen und Schüler verfügen. Dabei wird oft vor allem das Wissen und Können betrachtet. Auch Überlegungen dazu, welche konkreten Erfahrungen mit einem mathematischen Begriff und daraus resultierende Vorstellungen die Lernenden bei früheren Begegnungen entwickelt haben, sind wichtig.

Wenn der Blick nach vorn öfter über die nächste Klassenarbeit oder die nächste Vergleichsarbeit hinausreicht, kann dies dazu beitragen, dass Begriffe in ihrer Entwicklung nicht an die aktuell im Unterricht behandelten Sonderfälle gebunden werden – wie es etwa der Fall wäre, wenn nur proportionale und antiproportionale Zuordnungen betrachtet werden und festgestellt wird, dass jeweils zwei Wertepaare genügen, um eine Zuordnung vollständig zu kennen.

Immer wieder: Begegnen, Wiederholen, Vertiefen

Die TIMSS-Videostudie ermittelte in Deutschland in den 1990er-Jahren einen Lehrstil, bei dem fachliche Gegenstände in einer Unterrichtsreihe erstmals thematisiert, dann systematisch und schein-

3 WISSENSWERT

Entwicklung von Mathematik: Vertiefung, Verallgemeinerung, Ausdifferenzierung

Mathematik entstand, historisch betrachtet, zunächst aus Fragen des Alltags, die zu arithmetischen und geometrischen Überlegungen geführt haben. Schon in dieser frühen und relativ langen Phase einer nur in ihren Anwendungen stattfindenden Mathematik wurden schrittweise allgemeinere Betrachtungen durchgeführt (etwa prototypische Figuren oder feste Rechenschemata für bestimmte Typen von Fragestellungen entwickelt).

Später, als die Mathematik als eigenständige akademische Disziplin betrieben wurde (etwa seit der griechischen Antike), waren nicht mehr nur Anwendungsfragen die treibende Kraft für weiteren Erkenntnisgewinn, sondern zunehmend auch „innermathematische Fragen“, die abstrakte Objekte als Ausgangspunkt haben. Spätes-

tens hier tritt Mathematik „als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art“ (Winter, 1996) in Erscheinung. Erfindungen, wie etwa die der irrationalen oder negativen Zahlen, waren das Resultat der innermathematischen Vertiefung und dienten zunächst nicht vorrangig der Lösung von Anwendungsproblem.

Die fortgesetzte Mathematisierung führte zu mächtigen Theorien, die u. a. universelle Modelle und Lösungsansätze für große Problemklassen bieten. Diese Theorien sind zwangsläufig wenig anschaulich. Wichtig für das inhaltlich souveräne Arbeiten auf einer Abstraktionsebene dürfte eine substantielle Verankerung der Begriffe auf der nächsten konkreteren Ebene sein. So bildet die Schularithmetik eine inhaltliche Basis für die Algebra.

Erfinde zwei Sachaufgaben (Textaufgaben) zur Rechnung $28 : 4 = 7$

1) Lukas hat 28 Bonbons und seine Freunde Tom, Jan und Laura sind bei ihm. Wie viele Bonbons bekommt jeder, wenn Lukas die Bonbons aufteilt.

Lukas kauft sich bei H&M vier T-Shirts. Er muss 28€ bezahlen. Alle T-Shirts haben den selben Preis. Wie viel kostet eins.

1) Ein Bäcker hat 28 Brötchen 4mal geteilt. Wie viele Stücke hat dann jedes Brötchen?

2) Eine Frau Freya hat 28 Paar Schuhe und teilt sie mit ihrer Besten Freundin. Wie viele hatsie dann noch.

Abb. 2: Zwei Schüler betten eine Rechnung in Kontexte ein. Bei solchen Aufgaben werden Schülervorstellungen transparent.

bar erschöpfend erarbeitet und direkt intensiv geübt werden (Baumert/Lehmann, 1997). Produktiver ist allen aktuellen Lerntheorien zufolge ein Begegnen, Wiederholen und Vertiefen in mehreren Etappen, die bewusst Bezug aufeinander nehmen. Dies ist unter anderem eine Frage der stofforientierten Unterrichtsplanung, bei der ein fachlicher Gegenstand daraufhin untersucht wird, welche Vorkenntnisse erforderlich sind, um ihn weitgehend erfassen zu können, und wie hieran angeknüpft werden kann.

Zum Beispiel greift die Volumenbestimmung bei Spitzkörpern auf die Vorstellungen und Methoden zur Volumenbestimmung bei Prismen zurück. Zu Beginn einer Unterrichtsreihe zur Volumenbestimmung von Spitzkörpern werden daher zunächst die entsprechenden Betrachtungen bei Prismen wiederaufgegriffen. Umgekehrt kann am Ende der Unterrichtsreihe zu Prismen aber auch propädeutisch überlegt werden, welches Volumen Pyramiden mit gleicher Grundfläche hätten. Dabei können erste Schätzwerte entstehen und es kann deutlich werden, dass die räumliche Situation schwieriger ist als etwa die ebene Situation der Rückführung des Flächeninhalts von Dreiecken auf den Flächeninhalt von Rechtecken mit gleicher Grundseite.

Anker setzen

Damit Schülerinnen und Schüler an ihre vorhandenen Vorstellungen anknüpfen können, ist es wichtig, die inhaltlichen Themenstränge, entlang derer sich der Unterricht spiralförmig entwickelt, auch sichtbar zu machen und an zentralen Stellen „Anker zu setzen“. Besonders deutlich wird dies im Bereich der Zahlbereichserweiterungen: Welche Eigenschaften der Zahlen und welche Eigenschaften der Operationen bleiben gleich, welche verändern sich? Wodurch ist dies bedingt? Lerntagebücher bieten hier ein besonders Potenzial für entsprechende Reflexionen (vgl. Holzäpfel, u. a. 2009).

Mit Blick darauf, dass die fachlichen Gegenstände auf einer höheren Stufe weiter vertieft werden, ist die auf den sowjetischen Psychologen Wygotski zurückgehende Betrachtung der „Zone der nächsten Entwicklung“ von großer Bedeutung. Diese Vertie-

fung auf einem höheren Niveau können Lernende auf der Basis ihrer vorhandenen Vorstellungen mit etwas Anleitung erreichen. Im Unterricht kann diese Idee im Rahmen immer erforderlicher Binnendifferenzierung (Bruder/Reibold, 2010) insbesondere zur Förderung leistungsstärkerer Schülerinnen und Schüler genutzt werden.

Wenn in einer Lerngruppe etwa der Bruchzahlbegriff weitgehend erarbeitet wurde und Brüche gekürzt, erweitert und miteinander bezüglich ihrer Größe verglichen werden können, werden einige Lernende noch damit beschäftigt sein, diese neuen Zahlen als solche zu akzeptieren. Andere sind in der Welt der Bruchzahlen längst angekommen und können sich etwa fragen, ob man mit diesen Zahlen auch rechnen kann. Erste Antworten darauf können sie mit etwas Anleitung auch dann finden, wenn etwa die Bruchaddition noch nicht im Schulbuch vorgesehen ist. Die Systematisierung des Rechnens mit Brüchen kann dann immer noch später geschehen.

Herausforderungen für die Planung und Durchführung von Unterricht

Unterschiedliches Vorwissen in der Lerngruppe

Ein erster notwendiger Schritt zur erfolgreichen Umsetzung des Spiralprinzips ist bei der Unterrichtsplanung offenbar eine sorgfältige Analyse der zentralen fachlichen Gegenstände: Wie stehen sie in Verbindung zu vorangehenden und nachfolgenden Themen?

Dieser Schritt genügt aber noch nicht: In jeder Lerngruppe sind Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichen Voraussetzungen; insbesondere verfügen nicht alle über die notwendigen Voraussetzungen für die nächste Unterrichtsreihe, sodass eine entsprechende Lernausgangsdiaagnose und Förderung erforderlich sind. Lernausgangsdiaagnosen müssen dabei nicht aus umfangreichen Aufgabenblättern oder Testmaterialien bestehen. Manchmal genügen geschickte Einforderungen von Eigenproduktionen. Wenn etwa das Thema „Bruchdivision“ naht, ist es für die Lehrkraft wichtig zu wissen, über

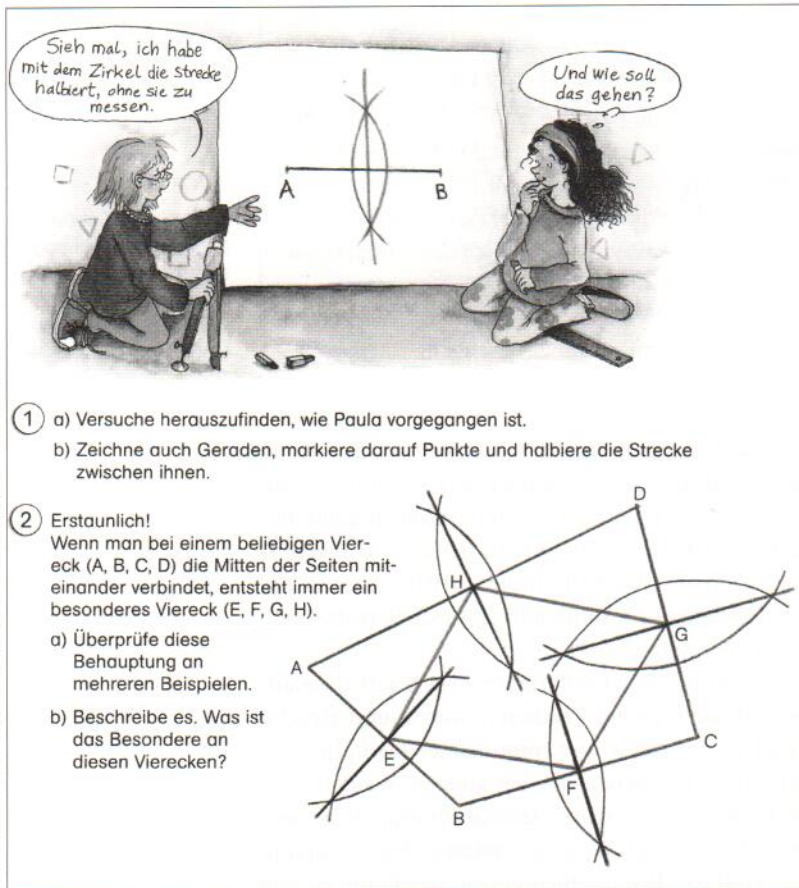


Abb. 3: Schon in Grundschullehrwerken finden sich gehaltvolle (Geometrie-) Aufgaben – dies ist Lehrkräften weiterführender Schulen nicht immer bewusst

welche Vorstellungen zur Division ihre Schülerinnen und Schüler verfügen. Vielfach aktivieren diese in Klasse 6 oder 7 am ehesten eine Verteilvorstellung („12 Karten an 3 Kinder verteilen. Wie viele Karten bekommt jedes Kind?“). Für die Bruchdivision ist aber die Aufteilverstellung („60 Gläser sollen in Kartons zu jeweils 12 Gläsern verpackt werden. Wie viele Kartons werden benötigt?“) erforderlich. Hinweise über die Vorstellungen, die Schülerinnen und Schüler am ehesten aktivieren, kann hier eine Aufgabe liefern, die zu einer gelösten Divisionsaufgabe eine Kontextualisierung einfordert (vgl. Abb. 2).

Damit die Interpretation der Bearbeitungen und das Ableiten von Konsequenzen für die Förderung effektiv sind, muss die Lehrkraft über themenspezifisches mathematikdidaktisches Hintergrundwissen verfügen. Im Fall der obigen Betrachtung der Division wäre dies das Wissen über Verteil- und Aufteilverstellungen. In der Literatur finden sich zu fast allen grundlegenden Begriffen der Schulmathematik praxisorientierte Arbeiten zu Grundvorstellungen und zu typischen Schülerfehlern. Darüber hinaus gibt es weitere Anregungen für eine praktikable kompetenzorientierte Diagnose (Jordan u. a., 2008; LfS/QA, 2006).

Über die Schulstufen hinaus denken

Eine weitere Herausforderung besteht in der oben genannten fachlichen Analyse, da die Themenstränge, die das Gerüst eines spiralförmigen Aufbaus von Mathematikunterricht bilden, nicht immer direkt erkennbar sind. Diese Themenstränge übergreifen oft mehrere Schulstufen und gehen nicht selten bis in die Hochschule hinein (vgl. etwa den Weg vom Klecksbild bis zur Gruppe der Kongruenzabbildungen). Der Blick über die Grenzen der Schulstufen hinweg ist noch nicht institutionalisiert. Wer über längere Zeit nur in der Sek. I unterrichtet, kennt die Lehrpläne und die Unterrichtspraxis der Grundschule, der gymnasialen Oberstufe oder der beruflichen Bildung kaum. Für die Fragen, woran angeschlossen werden kann und wie Begriffe später verallgemeinert werden, ist diese Kenntnis aber bedeutsam. Grundlegende Begriffe sollten daher in Kooperation mit Schulen anderer Schulstufen, auf der Ebene der Fachkonferenz oder individuell daraufhin analysiert werden, wie sie in anderen Schulstufen thematisiert werden.

Auf die Lehrpläne allein kann man sich hierbei nicht verlassen. Ein Blick in gültige Lehrpläne zeigt: Innerhalb eines Bundeslandes bleiben nicht selten Themen, die in der Grundschule substanziell vorgesehen sind, danach lange unbearbeitet, bevor sie in der Sek. I wiederaufgegriffen werden. So sind erste Erfahrungen im Umgang mit Zufall, Zufallsexperimenten und Wahrscheinlichkeit heute durch die KMK-Bildungsstandards obligatorische fachliche Gegenstände in der Grundschule. Dennoch gibt es Bundesländer, die in den Klassen 5 und 6 nicht hieran anknüpfen, sondern im Bereich der Stochastik ausschließlich Beschreibende Statistik vorsehen. Da es einer kontinuierlichen und intensiven Auseinandersetzung mit Zufall und Wahrscheinlichkeit bedarf, um hier ein angemessenes Gespür für die Phänomene zu entwickeln, sollten in jedem Schuljahr entsprechende Erfahrungen ermöglicht werden. Lehrkräfte könnten sich entscheiden, in den Klassen 5 und 6 Zufallsexperimente als „Datenlieferanten“ für die Beschreibende Statistik zu nutzen und so – jenseits der Lehrpläne – das Spiralprinzip umsetzen. Besonders deutlich wird im Bereich der Geometrie, wie viel tragfähige Mathematik bereits in der Grundschule thematisiert wird (Abb. 3).

Themen über die Schuljahre verteilen

Das Spiralprinzip erfordert nicht nur die kontinuierliche Auseinandersetzung mit grundlegenden Begriffen, sondern auch die Streckung umfassender Themenbereiche auf mehrere Schuljahre. In vielen Lehrplänen findet die Behandlung von Bruchzahlen, von deren Einführung bis hin zum Rechnen mit Bruchzahlen, heute – im wahrsten Sinne des Wortes – erschöpfend in Klasse 6 statt. Für Schülerinnen und

Schüler ist dies oft genauso unbefriedigend wie für Lehrkräfte. Die Zahlbereichserweiterung stellt enorme kognitive Anforderungen, schon bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs und nicht weniger bei den Rechenoperationen. Eine Entzerrung des Themas kann stattfinden, wenn die Vorstellungen zu Bruchzahlen schon in Klasse 5 intensiv angebahnt werden, die Rechenoperationen in Klasse 6 erstmalig erarbeitet und später in Klasse 7 / 8 substanzial wiederholt werden.

Der Blick in die Lehrpläne sollte also nicht nur darauf gerichtet sein, was wann zwingend umgesetzt werden muss, sondern auch darauf, wo der Unterricht didaktisch sinnvoll darüber hinausgehen kann.

Gestaltungshinweise für die Planung und Durchführung von Unterricht

Wie kann das Spiralprinzip umgesetzt werden, auch wenn wenig Zeit zur Verfügung steht, wenn Lehrpläne nicht immer Spiralcurricula sind und andere Anforderungen wie Zentrale Prüfungen den Unterricht in eine eigene Richtung drängen? Ein Schlüssel kann in der Kooperation innerhalb der Fachkonferenz und die Nutzung geeigneter praxisorientierter Literatur sein. Folgende Punkte können auch in einem stressigen Unterrichtsalltag umgesetzt werden:

Checklisten, die im Rahmen der Arbeit an schulinternen Lehrplänen erarbeitet werden

Die Planung einer Einheit im Sinne des Spiralprinzips wirft Fragen auf: Welche grundlegenden Begriffe spielen in einer Unterrichtsreihe eine Rolle? Wie sind diese Begriffe früher in den Blick genommen worden? Welche Lernschwierigkeiten sind bei diesen Begriffen typisch? Wie werden diese Begriffe später wieder aufgegriffen? Dabei können hilfreiche „Begriffslandkarten“ entstehen. Bei der Arbeit an schulinternen Lehrplänen sind Lehrpläne und ausgewählte Schulbücher anderer Schulstufen nützlich.

Sammlung von Diagnose und Fördermaterialien

Offene Fragen (z. B. „Was ist eine Tangente?“) eignen sich gut für eine schnelle Erhebung von Schülervorstellungen. In der Literatur und als Zusatzmaterialien zu Schulbüchern gibt es mittlerweile zu vielen Themen Diagnose- und Fördermaterialien. Diese sind zwar noch von unterschiedlicher Qualität, grundsätzlich kann daraus aber eine direkt einsetzbare Sammlung zusammengestellt werden, die – unter Einbezug von Schülerelbstbeurteilung – eine Diagnose und Förderung zu Beginn einer Reihe ermöglicht.

Rückblickstunden machen Anker sichtbar

Wenn man „Anker setzen“ und grundlegende Begriffe auch für Schülerinnen und Schüler als solche und in ihrer Vernetztheit sichtbar machen möchte, können „Rückblickstunden“ am Ende von Unterrichtsreihen, vor den Ferien, am Ende von Schulhalbjahren ... sinnvoll sein.

Rückblickstunden sind dann besonders ergiebig, wenn das „Mehr an Möglichkeiten“, das die Unterrichtsreihe bereitstellt, erfahrbar wird: Man kann etwa zu Beginn einer Reihe Probleme stellen, die zwar bereits mit einfacheren Methoden angegangen, aber erst mit den in der Unterrichtsreihe zu erarbeitenden Methoden vollständig und elegant gelöst werden können.

Wer Mathematik vertieft kennengelernt hat, etwa im Rahmen eines Lehramtsstudiums, weiß, dass für viele fachliche Gegenstände Zeit zur Verfügung stehen muss, damit diese tatsächlich verstanden werden können. Die vielfältigen Betrachtungen benötigen Zeit, um „sich zu setzen“. Dies trifft auf schulisch initiiertes Lernen von Mathematik genauso zu. Wenn Schülerinnen und Schüler „Mathematik wirklich verstehen“ (Kirsch, 2004) sollen, dann müssen wir auch ihnen die Möglichkeit geben, fachlichen Gegenständen frühzeitig propädeutisch zu begegnen, sie wieder aufzugreifen und zu vertiefen.

Literatur

- Baumert, J./Lehmann, R. (Hg.) (1997): TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde – Leske + Budrich, Opladen.
- Bruder, R./Reibold, J. (2010): Ein alltagstaugliches Unterrichtskonzept zur Binnendifferenzierung – In: *mathematik lehren*, Heft 162, Friedrich Verlag, Seelze, S. 2 – 9.
- Bruner, J. S. (1973): *Der Prozess der Erziehung*. 3. Auflage – Berlin Verlag, Berlin.
- Büchter, A./Haug, R. (2013). Lernen mit Material. Anker setzen beim Aufbau mathematischer Grundvorstellungen – In: *mathematik lehren*, Heft 176, Friedrich Verlag, Seelze, S. 2 – 7.
- Holzäpfel, L./Glogger, I./Schwonke, R./Nückles, M./Renkl, A. (2009): Lernstrategien beim Schreiben: Neue Anregungen für den Umgang mit dem Lerntagebuch. – In: *mathematik lehren*, Heft 156, S. 16–21.
- Jordan, A./vom Hofe, R. (2008). Diagnose von Schülerleistungen. Schlüssel zur individuellen Förderung – In: *mathematik lehren*, Heft 150, Friedrich Verlag, Seelze, S. 4 – 12.
- Kirsch, A. (2004). *Mathematik wirklich verstehen*. Eine Einführung in ihre Grundbegriffe und Denkweisen. 4. Auflage. Aulis Verlag Deubner, Köln.
- Klika, M. (2003): Zentrale Ideen – echte Hilfen – In: *mathematik lehren*, Heft 119, Friedrich Verlag, Seelze, S. 4 – 7.
- [LFS/QA (2006) =] Landesinstitut für Schule / Qualitätsagentur (Hrsg.) (2006). *Kompetenzorientierte Diagnose. Aufgaben für den Mathematikunterricht* – Ernst Klett, Stuttgart.
- Selter, Ch. (1997): Genetischer Mathematikunterricht: Offenheit mit Konzept – In: *mathematik lehren*, Heft 83, Friedrich Verlag, Seelze, S. 4 – 8.
- Vollrath, H.-J./Roth, J. (2012): *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. 2. Auflage – Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- Winter, H. (1996): *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung* – In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, Nr. 61, S.37– 46.